نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دانشکده مهندسی کامپیوتر

استاد: محمد ایزدی

مسائل پیشنهادی و تمرین دوم

توجه! صرفا سوالاتی که به عنوان تمرین تحویلی مشخص شده‌اند را در سامانه کوئرا بارگذاری کنید. مهلت ارسال، ۲۱ آبان ۱۴۰۲، ساعت ۲۳:۵۹ می‌باشد.

سوالات غیرتحویلی برای آشنایی بیشتر دانشجویان علاقه‌مند و آمادگی کوییز و میانترم طراحی شده‌اند و در صورت لزوم در کلاس حل تمرین حل خواهند شد.

پرسش ۱ (تحویلی)

فرض کنید $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ یک DFA است و داریم:

$$Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\delta(q, i) = (q^2 - i) \bmod 5$$

$$q_0 = 0$$

$$F = \{0\}$$

نشان دهید این DFA فقط رشته‌های باینری‌ای که زوج تا کاراکتر 1 دارند را می‌پذیرد.

پرسش ۲ (تحویلی)

برای زبان های زیر، DFA معادل را رسم کنید:

الف) $(\Sigma = \{0, 1\}), L = \{w_1 0 w_2 | w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$

ب) $(\Sigma = \{a, b\}), L = \{a^i b^j | i, j \geqslant 0 \; and \; (i + j) mod 2 = 0\}$

پرسش ۳

زبان L با الفبای $L = \{a, b\}$ را در نظر بگیرید. این زبان شامل رشته هایی است که باقی مانده تعداد a های آن بر ۳، از باقی مانده تعداد b های آن بر ۴ کمتر باشد. حال یک DFA معادل برای این زبان بیان کنید.

پرسش ۴ (قسمت های الف و ب تحویلی هستند)

برای هر یک از زبان های زیر یک عبارت منظم بنویسید.

الف) رشته هایی که شامل زیر رشته aaa نباشند.$(\Sigma = \{a, b\})$

ب) رشته هایی که دقیقا شامل یک aa و یک bb باشند$(\Sigma = \{a, b\})$

ج)رشته هایی که تمام اندیس های فرد(با فرض شروع از اندیس ۱) a باشد ($\Sigma = \{a, b\}$)
د) رشته هایی که دقیقا شامل دو زیر رشته aa باشد. ($\Sigma = \{a, b\}$)

پرسش ۵ (تحویلی)

برای عبارات منظم زیر DFA رسم کنید. (رسم NFA الزامی است ولی نیاز به رسم سایر مراحل نمی باشد)
الف) $(a^*b^* + ba)^*$
ب) $011^* + 10(1 + 01)^*$

پرسش ۶ (تحویلی)

نشان دهید زبان های زیر منظم هستند. ($\Sigma = \{0, 1\}$)
الف) $L_1 = \{w \in \Sigma^* | \{00, 11\} \notin w\}$
ب) $L_2 = \{w \in \Sigma^* | 00 \in w \; and \; 000 \notin w\}$

پرسش ۷

برای هر عدد طبیعی m، نشان دهید یک NFA با m حالت وجود دارد که هر DFA معادل با آن حداقل 2^{m-1} حالت داشته‌باشد.

پرسش ۸ (تحویلی)

یک DFA روی الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ طراحی کنید که رشته‌هایی را بپذیرد که AND منطقی آن‌ها با یک عدد کمتر از آن صفر نشود. برای مثال، این DFA باید رشته ۰۰۰۰۰۱۰۰۱۱۰۱ را بپذیرد.

$$n = 000001001101, n - 1 = 000001001100 \rightarrow n\&(n-1) = 0000010011000$$

پرسش ۹

ثابت کنید اگر زبان های L ، L_1 و L_2 منظم باشند زبان های زیر نیز منظم اند.

االف) $L_{suffix} = \{y \mid xy \in L \; for \; some \; x \in \Sigma^*\}$

ب) $L_{prefix} = \{x \mid xy \in L \; for \; some \; y \in \Sigma^*\}$

ج) $L_1/L_2 = \{x \mid xy \in L_1 \; for \; some \; y \in L_2\}$

د) $L_{shuffle} = \{w_1 v_1 \cdots w_m v_m \mid w_1 \cdots w_n \in L_1 \; and \; v_1 \cdots v_m \in L_2\}$

پرسش ۱۰

فرض کنید A یک زبان منظم باشد. هر رشته $w \in A$ که طولش بر ۲ بخش‌پذیر باشد را می‌توان به دو قسمت با طول برابر افراز کرد، یعنی $w = xy$ که $|x| = |y| = \frac{|w|}{2}$. حال زبان $A_{\frac{1}{2}}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$A_{\frac{1}{2}} = \{x : xy \in A\}$$

نشان دهید زبان فوق منظم است.

پرسش ۱۱ (تحویلی)

فرض کنید زبان A یک زبان منظم است B یک زبان است که لزومی ندارد منظم باشد. ثابت کنید اگر زبان L به صورت زیر تعریف شود منظم است.

$$L = \{w | x \in B \; and \; wx \in A\}$$

پرسش ۱۲ (تحویلی)

فرض کنید L یک زبان منظم در الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ است. حال ثابت کنید در این صورت OP(L) نیز منظم است که OP به طریق زیر تعریف میشود:

$$OP(L) = \{notOdds(w) | w \in L\}$$

و notOdds(w) بیت های با اندیس فرد(با فرض شروع از اندیس ۱) را نقیض میکند(۰را به ۱ و ۱ را به ۰ تبدیل میکند)

پرسش ۱۳

هم توسط لم پمپاژ و هم توسط خواص بستاری زبان‌های منظم نشان دهید زبان

$$L = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n \geqslant 0, \; k \geqslant 0\}$$

منظم نیست.

پرسش ۱۴

برای هرکدام از زبان‌های زیر لم پمپاژ را نوشته و منظم بودن زبان را رد کنید.

$$L_1 = \{a^{n!} | n \in \{0, 1, 2, ...\}\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m | n > m^2\}$$

پرسش ۱۵ (تحویلی)

ثابت یا رد کنید:

الف) زبانی که رشته های باینری را می پذیرد که عدد متناظر با آن ها بر ۳ بخش پذیر است منظم است.

ب) الفبای $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. حال زبانی را در نظر بگیرید که رشته های آن زبان اعدادی در مبنای ۳ و به فرم 2^n هستند. زبان توصیف شده منظم است.

پرسش ۱۶ (تحویلی)

ثابت کنید زبان های زیر نا منظم اند.

الف) $L_1 = \{a^n b a^{3n} | n \geqslant 0\}$

ب) $L_3 = \{\omega_1 \# \omega_2 \# \omega_3 \# ... \# \omega_n | \forall i \neq j : |\omega_i| \neq |\omega_j|\}$

ج) $L_3 = \{V a^{2k} | V \in \{a, b\}^*, |V| = k\}$